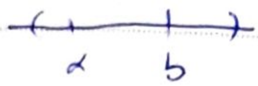
Μήκος Καμπύλης

15/10/2018
3° μάθημα

$c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\qquad C^1$



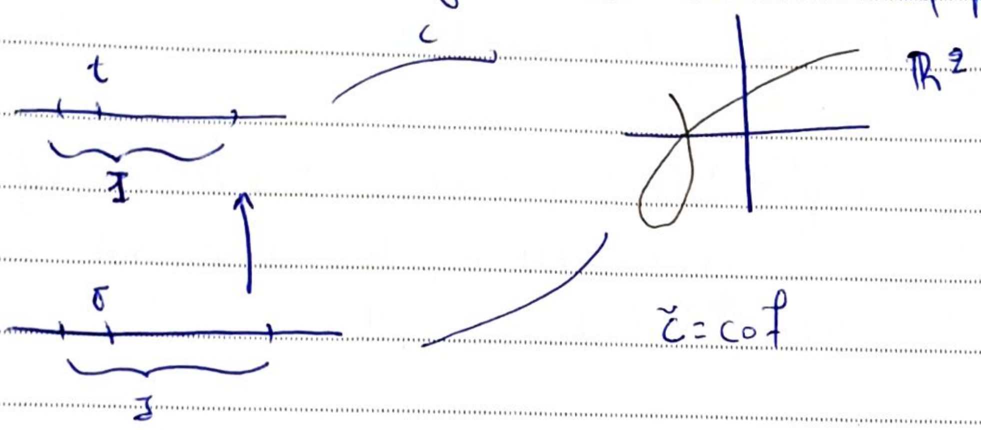
$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt$$

$\tilde{c} = T \circ c$, $\quad T \in Isom(\mathbb{R}^2)$

$T = T_v \circ A$ $\qquad \tilde{c}' = A(c') = Ac'$

$$\|\tilde{c}'(t)\| = \|A\,c'(t)\| = \|c'(t)\|$$

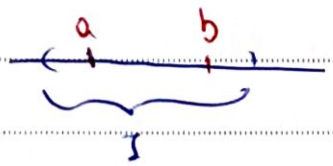
Το μήκος δεν αλλάζει κάτω από αναπαραμέτρηση



$\tilde{c} = c \circ f$

$f: J \to I$, $\quad \boxed{t = f(\sigma)}$ (1)

$\frac{df}{d\sigma} > 0$ στο J ή $\frac{df}{d\sigma} < 0$ στο J



$f(c) = a \quad f(d) = b$

$c, d \in J$

$\frac{df}{d\sigma} > 0 \qquad c < d$

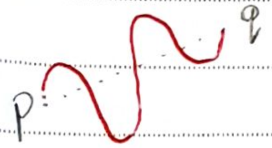
$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt \overset{(1)}{=} \int_c^d \|c'(f(\sigma))\| \frac{df}{d\sigma}(\sigma)\,d\sigma = \int_c^d \left\| \frac{df}{d\sigma}(\sigma) \cdot \frac{dc}{dt}(f(\sigma)) \right\| d\sigma =$$

$$= \int_c^d \left\| \frac{d(c\circ f)}{d\sigma} \right\| d\sigma = \int_c^d \left\| \frac{d\tilde{c}}{d\sigma}(\sigma) \right\| d\sigma = L_c^d(\tilde{c})$$

Αν $\frac{df}{d\sigma} < 0$ $\quad c > d$

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt = -\int_d^c \|c'(f(\sigma))\| \frac{df(\sigma)}{d\sigma} d\sigma = \dots = L_d^c(\tilde{c})$$

Πρόβλημα: Δίνονται σημεία $p, q \in \mathbb{R}^2$ Υπάρχει καμπύλη με άκρα p, q της οποίας το μήκος είναι το ελάχιστο μεταξύ των μηκών όλων των καμπυλών με άκρα p, q



Θεώρημα

Θεωρώ σημεία $p, q \in \mathbb{R}^2$ και καμπύλη $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με $c(a) = p$, $c(b) = q$ τότε ισχύει $L_a^b(c) \geq d(p,q)$. Επιπλέον, η ισότητα ισχύει αν-ν η εικόνα της c είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα p, q.

Απόδειξη

Θεωρώ το μοναδιαίο διάνυσμα $w = \frac{q-p}{\|q-p\|}$

$d(p,q) = \|q-p\|$ $\forall\, t \in [a,b]$ $\quad |\langle c'(t), w\rangle| \leq \|c'(t)\| \|w\|$

$\Rightarrow \langle c'(t), w\rangle \leq |\langle c'(t), w\rangle| \leq \|c'(t)\| \;\forall\, t \in [a,b]$

$$\int_a^b \langle c'(t), w\rangle dt \leq \int_a^b |\langle c'(t), w\rangle| dt \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt$$

$$\int_a^b \langle c'(t), w\rangle\, dt \leq \dots \leq L_a^b(c) \quad (*)$$

$V, W : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$(\langle V(t), W(t)\rangle)' = \langle V'(t), W(t)\rangle + \langle V(t), W'(t)\rangle$

$\langle c(t), w\rangle' = \langle c'(t), w\rangle$

$(*) \iff \int_a^b \langle c(t), w\rangle' \, dt \leq \dots \leq L_a^b(c) \iff$

$\iff \langle c(b), w\rangle - \langle c(a), w\rangle \leq \dots \leq L_a^b(c)$

$\iff \langle c(b) - c(a), w\rangle \leq \dots \leq L_a^b(c)$

$\iff \langle q - p, \frac{q-p}{\|q-p\|}\rangle \leq \dots \leq L_a^b(c)$

$\iff d(p,q) \leq \dots \leq \int_a^b (c)$

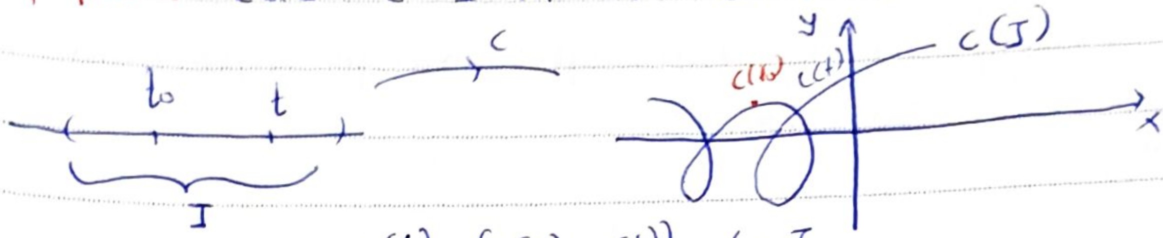
$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$

$c'(t) = f(t) w, \quad f(t) > 0$

$c(t) = g(t) \cdot w + P_0$

Φυσική αναπαραμέτρηση ή αναπαραμέτρηση με το μήκος τόξου για κανονικές καμπύλες

Ορισμός: Έστω $c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ και $t_0\in I$



$$c(t)=(x(t),y(t)),\quad t\in I_0$$

Η συνάρτηση $s: I\subset\mathbb{R}$ με $s(t)=\int_{t_0}^{t}\|c'(u)\|du$ καλείται <u>μήκος τόξου</u> της καμπύλης c με αφετηρία t_0.

Η $s=s(t)$ είναι παραγωγίσιμη με $\frac{ds}{dt}(t)=\|c'(t)\|>0 \ \forall t\in I$

Σύμφωνα με το θεώρημα αντιστροφής συνάρτησης η συνάρτηση $s=s(t)$ αντιστρέφεται $t=f(s)$ όπου f είναι διαφορίσιμη $\frac{df}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}>0$

Συνήθως, η f ορίζει την αναπαραμέτρηση $\bar{c}=c\circ f$.

Η αναπαραμέτρηση $\bar{c}=c\circ f$ καλείται αναπαραμέτρηση της κανονικής καμπύλης c με φυσική παράμετρο ή παράμετρο το μήκος τόξου.

Το διάνυσμα ταχύτητας της $\bar{c}$ είναι $\frac{d\bar{c}}{ds}=\frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt}=\frac{df}{ds}c'=$

$$=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}c'=\frac{c'}{\|c'\|}$$

Παρατήρηση $\int_{t_1}^{t} \|c'(u)\| du = \int_{t_1}^{t_0} \|c'(u)\| du + \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du$

Πρόταση
Κάθε κανονική καμπύλη δέχεται αναπαραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου και ταχύτητα 1.

Πρόταση
Μια κανονική καμπύλη έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου αν η ταχύτητά της είναι 1 παντού.

Απόδειξη

Έστω $c(t)$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $t \in I$ και $\|c'(t)\| = 1 \ \forall t \in I$.

Το μήκος τόξου της c με αφετηρία $t_0 \in I$ είναι
$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du = \int_{t_0}^{t} 1 \cdot du = t - t_0$, $\quad \underset{t \text{ μήκος τόξου}}{s = t - t_0}$

Παράδειγμα: Θεωρώ την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\underbrace{r\cos t}_{x(t)}, \underbrace{r\sin t}_{y(t)})$, $t \in \mathbb{R}$

Είναι λεία καμπύλη με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$ με $\|c'(t)\| = r > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Άρα, η c είναι κανονική!

Το μήκος τόξου της c με αφετηρία $t_0 = 0$ είναι η συνάρτηση
$s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(t) = \int_0^t \|c'(u)\| du = \int_0^t r\, du \Rightarrow \boxed{s = r \cdot t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{r} = f(s)$

Η αναλυση της c με αφετηρία το μήκος τόξου είναι
$c(s) = c\left(\frac{s}{r}\right) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$, $s \in \mathbb{R}$

$\tilde{c} = T \circ c \quad , \; T = T_v \circ A \in Isom(\mathbb{R}^2)$

$\tilde{c}' = A c'$

$$\tilde{s} = \int_{t_0}^{t} \|\tilde{c}'(u)\| du = \int_{t_0}^{t} \|A c'(u)\| du = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du = s$$

$c(s) \quad , \; \bar{s} = -s$

$$\frac{dc}{d\bar{s}} = \frac{ds}{d\bar{s}} \frac{dc}{ds} = -\frac{ds}{ds}$$

Σύμβαση : $c(t), \; c'(t), \; c''(t)$

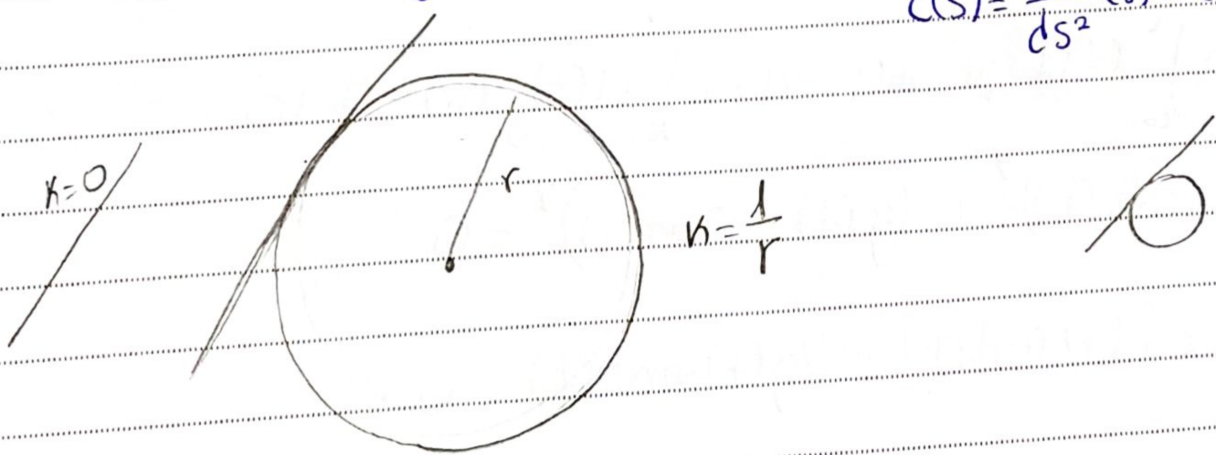
$c' = \frac{dc}{dt} \qquad c'' = \frac{d^2c}{dt^2}$

Για παράμετρο το μήκος τόξου $c(s)$

$c(s) = (x(s), y(s))$

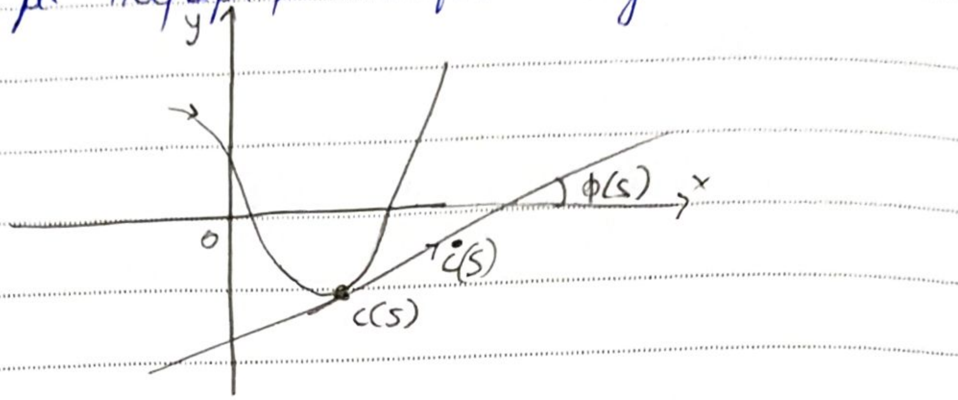
$\dot{c}(s) = \frac{dc}{ds}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

$\ddot{c}(s) = \frac{d^2c}{ds^2}(s) = (\ddot{x}(s), \ddot{y}(s))$



Καμπυλότητα καμπύλων του $\mathbb{R}$ με φυσική παράμετρο

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$



όλα είναι διαφορίσιμα

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ $\quad \|\dot{c}(s)\|^2 = 1 \Leftrightarrow (\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 = 1$

Λήμμα

Έστω C^1 συναρτήσεις $f, g: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f^2(t) + g^2(t) = 1, \ \forall t \in I$

Θεωρώ $t_0 \in I$ ώστε $f(t_0) = \cos\phi_0$, $g(t) = \sin\phi_0$.

Τοτε υπάρχει συνάρτηση διαφορίσιμη C^1: $\phi: I \to \mathbb{R}$ ώστε

$f(t) = \cos\phi(t)$, $g(t) = \sin\phi(t)$ και $\phi(t_0) = \phi_0$

Απόδειξη

Ορίζω $\phi: I \to \mathbb{R}$ με $\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\sigma) g'(\sigma) - f'(\sigma) \cdot g(\sigma)) d\sigma$

$$(f(t) - \cos\phi(t))^2 + (g(t) - \sin\phi(t))^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - 2f(t)\cos\phi(t) - 2g(t)\sin\phi(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h(t) := f(t)\cos\phi(t) + g(t)\sin\phi(t) = 1 \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \quad \Leftarrow \quad ff' + gg' = 0 \quad \Rightarrow h'(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$